جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تشریحی
مرحله دوم
دوازدهمین دوره‌ی المپیاد فیزیک سال ۱۳۹۵

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
–	۷	۱۸۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

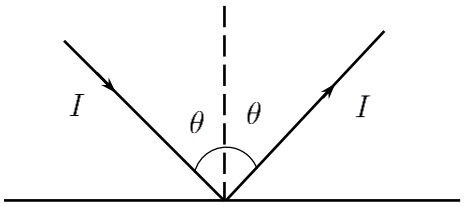
ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۷ سوال تشریحی** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- نمره‌ی هر سوال در ابتدای آن نوشته شده است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- جمع‌آوری و آماده‌سازی دفترچه‌ی سوالات این آزمون توسط **کمیته‌ی علمی ماخ** انجام شده است.

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

۱- انرژی نورانی‌یی که در واحد زمان به واحد سطح عمود بر جهت تابش می‌تابد، شدت نور نامیده می‌شود. در اثر بازتابش نور از آینه، فشاری برآن وارد می‌شود که فشارتابش نام دارد. اگر مطابق شکل پرتو نوری به شدت I با زاویهٔ تابش θ ، بر سطح آینه‌ای بتابد، فشاری معادل با $\frac{2I}{c}\cos^2\theta$ بر آینه وارد می‌شود. در این رابطه c سرعت نور در خلأ و برابر با $c = 3\times10^5\ \frac{m}{s}$ است.



یک بادبان خورشیدی یک آینه‌ی بسیار سبک است. نیروی محرکه سفینه‌ی بادبانی، ناشی از بازتاش نور خوشید از بادبان آن است. توان خورشید (انرژی تابیده شده از خورشید بر وحد زمان) $L = 4\times10^{26}w$ است.

الف) فرض کنید یک سفینه‌ی بادبانی در فاصله‌ی $2\times10^{11}m$ از خورشید است. اگر نور خورشید عمود بر سطح بادبان بتابد، چه نیرویی بر یک مترمربع از بادبان وارد می‌شود؟

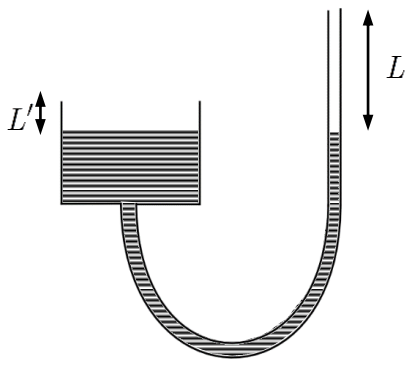
ب) در این فاصله، بادبان چه مساحتی داشته باشد تا فشار تابش، نیروی گرانشی خورشید را خنثی کند؟ جرم واحد سطح بادبان $0/5\ \frac{g}{m^2}$، جرم سفینه $20\ kg$، جرم خورشید $M_s = 2\times10^{30}kg$ و ثابت گرانش $G = 7\times10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$ است.

ج) اگر فاصله‌ی سفینه از خورشید دو برابر شود، مساحت بادبان چه مقدار تغییر کند، تا شرایط قسمت (ب) برقرار بماند؟

د) فرض کنید وضعیت بادبان طوری تنظیم شود که در تمام مدت حرکت، نور خورشید عمود بر ن بتابد. اگر قسمت (ب) سرعت اولیه‌ی سفینه V_0 باشد، مسیر حرکت آن چگونه است؟ (۱۰ نمره)

۲- یک تار نوری مستقیم به طول $l = 80m$، از شیشه‌ای با ضریب شکست $n = 1/36$ ساخته شده است. در یک انتهای تار، چشمه‌ی نقطه‌ای S روی محور آن قرار دارد و علائم نوری را به فاصله‌ی زمانی Δt از یکدیگر می‌فرستد. هنگام ارسال هر علامت نوری، چشمه‌ی S در بازه‌ی زمانی بسیار کمتر از یک نانو ثانیه $(10^{-9}\ s)$روشن است و سپس خموش می‌شود. به دلیل اختلاف زمان رسیدن پرتوهایی که با زاویه‌های مختلف وارد تار می‌شوند، علامت نوری، پهن می‌شود، یعنی هنگام دریافت علامت از طرف دیگر تار، عرض زمانی بیشتری نسبت به هنگام ارسال آن خواهد داشت. معین کنید بازه‌ی زمانی ارسال علائم، Δt، حداقل چقدر باشد، تا گیرنده بتواند علائم دریافت شده را به خوبی از همخ تفکیک کند؟ (۶ نمره)

۳- یک لوله‌ی U شکل به قطر d ، مطابق شکل (۱) به یک ظرف استوانه‌ای به قطر $D = 5d$ متصل است. در لوله و ظرف جیوه می‌ریزیم. فاصله‌ی سطح آزاد جیوه از دهانه‌ی لوله، $L = 65/2cm$ و از لبه‌ی ظرف استوانه‌ای $L' = 20cm$ است. چگالی جیوه $13/5\ \frac{g}{cm^3}$ و فشار هوا ۷۵ $cmHg$ است.



شکل (۱)

الف) در لوله آب می‌ریزیم تا کاملاً پر شود. ارتفاع آب را در لوله حساب کنید. چگالی آب $1\ \frac{g}{cm^3}$ است.

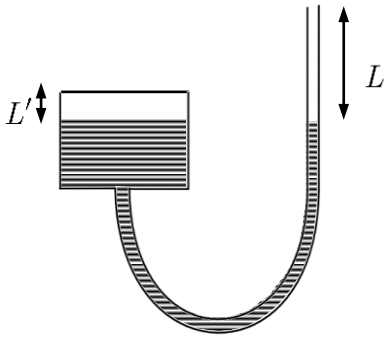
اکنون فرض کنید پیش از ریختن آب در لوله، بالای ظرف استوانه‌ای را مطابق شکل (۲) بسته‌ایم. با ریختن آب در لوله، سطح جیوه، در ظرف، به اندازه‌ی x بالا می‌آید

که x از L' بسیار کوچکتر است، یعنی $\frac{x}{L'} << ۱$.

ب) برای $\varepsilon << ۱$، $\frac{۱}{۱-\varepsilon} \approx ۱+\varepsilon$. با استفاده از این تقریب، فشار هوای بالای جیوه در ظرف را بر حسب x به دست آورید.

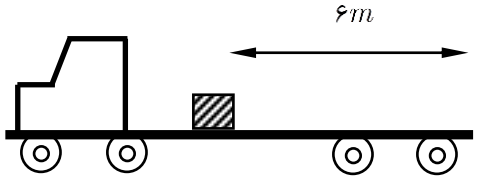
ج) ارتفاع آب در لوله را به دست آورید.

(۱۲ نمره)



شکل (۲)

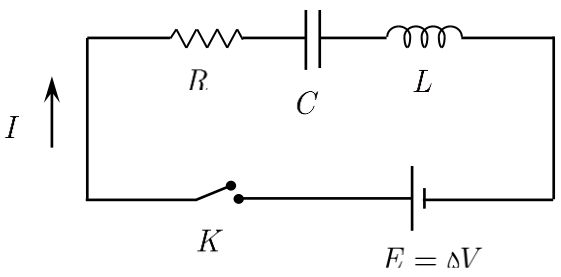
۴- مطابق شکل جعبه‌ای روی کف یک تریلی و در فاصله‌ی ۶ متری از عقب آن قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی بین جعبه و کف تریلی ۰/۳ و ضریب اصطکاک جنبشی آن ۰/۱۵ است. تریلی با سرعت $۳\frac{m}{s}$ در یک جاده‌ی افقی مستقیم حرکت می‌کند.



الف) بیشترین شتاب تریلی بدون آنکه جعبه بلغزد، چقدر است؟

ب) اگر تریلی به مدت $۲s$ با شتاب تند کننده‌ی $۴\frac{m}{s^۲}$ حرکت کند، و پس از آن سرعت تریلی ثابت بماند، جعبه با چه سرعتی نسبت به زمین، تریلی را ترک می‌کند؟ (۸ نمره)

۵- مداری مطابق شکل (۱) از یک مقاومت R ، یک خازن به ظرفیت C، یک سیم‌پیچ به ضریب خود القایی L و بدون مقاومت اهمی و یک باتری به نیروی محرکهٔ $E = ۵\ V$ و مقاومت داخلی ناچیز به هم بسته شده‌اند. پیش از بستن کلید، خازن خالی است. در لحظه‌ی $t = ۰$ کلید k را می‌بندیم. در شرایط خاصی که به مقادیر R ، C و L بستگی دارد، تغییرات جریان I با زمان مطابق نمودار شکل (۲) است.



شکل (۱)

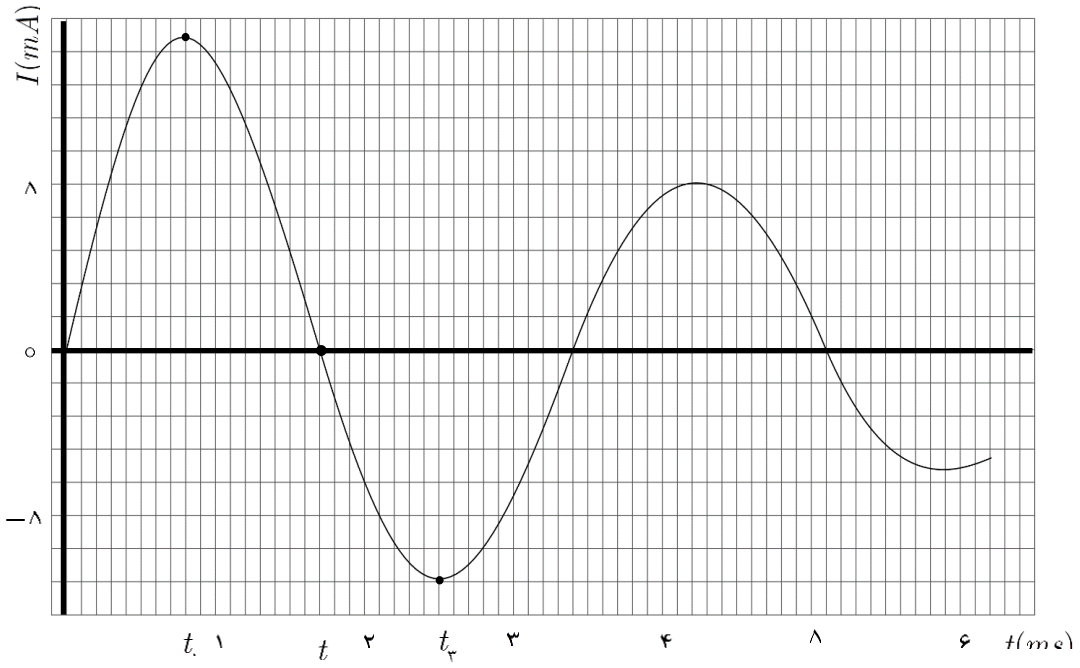
الف) با استفاده از اطلاعات نمودار در لحظه‌ی $t = ۰$ مقدار L را محاسبه کنید.

ب) با استفاده از اطلاعات نمودار تا لحظه‌ی $t_۲$ مقدار C را محاسبه کنید.

www.MAAKH.ir

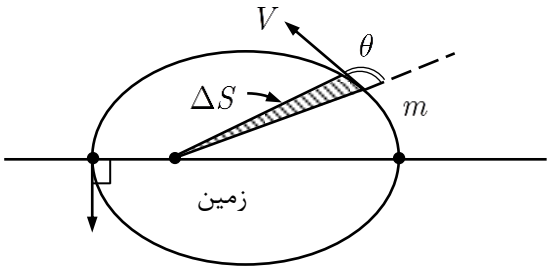
ج) با استفاده از اطلاعات نمودار تا لحظه‌ی t_1 مقدار R را محاسبه کنید.

د) با استفاده از اطلاعات نمودار، اختلاف پتانسیل دو سر خازن را در لحظه‌ی t_3 حساب کنید. (۱۲ نمره)



شکل (۲)

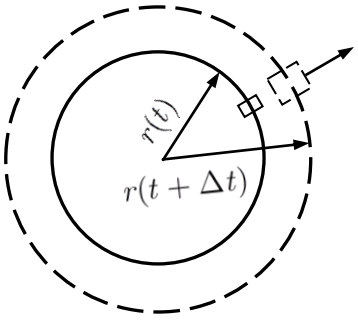
۶- یک ماهواره به جرم m در یک مدار بیضی به دور زمین می‌گردد. مرکز زمین را مبدأ مختصات می‌گیریم و فاصله‌ی ماهوار از مبدأ را در هر لحظه بـا r نمایش می‌دهیم و آن را شعاع حامل می‌نامیم. انـرژی پتانسیل گرانشی ماهواره از رابطه‌ی $U=-G\frac{Mem}{r}$ بـه دست می‌آید که در آن G ثابت جهانی گرانش و Me جرم زمین است.



الف) مطابق شکل در یک نقطه‌ی اختیاری از مسیر ماهواره، شعاع حامل با سرعت ماهواره، V ، زاویه‌ی θ می‌سازد. آهنگ مساحت جاروب شده توسط شعاع حامل، یعنی $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ را برحسب r، V و θ به دست آورید.

ب) کوچکترین و بزرگترین شعاع حامل را به ترتیب با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم. با توجه به قانوندوم کپلر (مقاومت ثابت $=\frac{\Delta S}{\Delta t}$)، سرعت ماهواره در این دو نقطه از مسیرش یعنی V_1 و V_2 را برحسب r_1 و r_2، Me و G به دست آورید. (۱۰ نمره)

۷- فرض کنید جهان از ماده‌ای با چگالی یکنواخت ρ تشکیل شده است و حرکت نقاط مختلف آن فقط تابع گرانش است. فرض کنید با گذشت زمان ρ عوض می‌شود امـا در هـر لحظه‌ای ρ همه جا یکسان است. کـره‌ای به شعاع r از این جهان را در نظر بگیـرید. ماده‌ی



موجود در این کره حرکت می‌کند، به طوری که شعاع کره عوض می‌شود، اما جرم دورن کره ثابت می‌ماند.

الف) نشان دهید با گذشت زمان، نسبت $\frac{dr\,/\,dt}{r}$ فقط به چگالی ρ و تغییرات آن بستگی دارد یعنی فقط تابع زمان است و به شعاع اولیه‌ی کره بستگی ندارد. این نسبت را پارامتر هابل (H) می‌نامند.

ب)جرم کوچک m را بر سطح این کره در نظر بگرید. اینجرم، مطابق شکل، همراه ماده‌ی درون کره حرکت می‌کند. فرض کنید حرکت این جرم نسبت به مرکز کره، شعاعی است. همچنین فرض کنید جرم m فقط تحت تأثیر نیروی گرانش کره (با جرم ثابتM) است. شتاب این جرم را برحسب r، M و G (ثابت جهانی گرانش) بنویسید.

ج) انرژی پتانسیل گرانشی جرم m ، از رابطه‌ی $U=-G\frac{Mm}{r}$ به دست می‌آید. انرژی جنبشی و انرژی کل جرم m را حساب کنید.

د) انرژی کل در چه رابطه‌ای صدق کند تا جرم m بتواند تا بی‌نهایت (نسبت به مرکز کره) برود؟ این شرط را برحسب چگالی و پارامتر هابل (هر دو در زمان t) بنویسید. (۱۲ نمره)

«پاسخنامه‌ی تشریحی»

۱- الف) فشار وارد بر یک آینه بر اثر بازتابش نور از روی آن برابر $P=\frac{۲I}{c}\cos\theta^{۲}$ است که د رحالت تابش عمودی بر سطح آینه مقدار آن $\frac{۲I}{c}$ می‌شود(زیرا در این حالت $\theta=۰$ است.) از طرفی شدت نور، I ، در فاصله‌ی d از یک منبع برابر توان تابش منبع ، L، تقسیم بر مساحت کره‌ای به شعاع d است. بنابراین $I=\frac{L}{۴\pi d^{۲}}$ می‌شود. از این رو نیروی وارد بر یک مترمربع از بادبان می‌شود:

$$F=PA=\frac{۲I}{c}A=\frac{۲(\frac{L}{۴\pi d^{۲}})}{c}A=\frac{L}{۴\pi d^{۲}c}A$$

$$\frac{۴\times۱۰^{۲۶}\times۱}{۲\times۳/۱۴\times(۲\times۱۰^{۱۱})^{۲}\times۳\times۱۰^{۸}}$$

$$=۵/۳\times۱۰^{-۶}N$$

ب) فرض کنیم مساحت سطح بادبان A و چگالی جرمی آن σ باشد، همچنین جرم سفینه $Me=۲۰kg$ است. بنابراین جرم کل بادبان و سفینه برابر $(Me+\sigma A)$است. نیروی دافعه‌ی تابش برابر $\mathrm{F}_{r}=\frac{۲I}{c}\mathrm{A}=\frac{LA}{۴\pi d^{۲}c}$ و نیروی جاذبه‌ی گرانشی برابر $F_{g}=\frac{GM_{e}(\mathrm{M}_{c}+\sigma A)}{d^{۲}}$ است. از تساوی این دو نیرو داریم:

$$F_{g}=F_{r}$$

$$\frac{GM_{s}(M_{e}+\sigma A)}{d^{۲}}=\frac{L}{۴\pi d^{۲}c}$$

$$\Rightarrow GM_{s}M_{c}+GM_{s}\sigma A=\frac{L}{۴\pi c}A \qquad A=\frac{GM_{s}M_{c}}{L/mc-GM_{s}\sigma}\approx۱/۹۷\times۱۰^{۴}m^{۲}$$

ج) با توجه به قسمت «ب» می‌بینیم که هم نیروی گرانشی و هم نیروی تابشی متناسب با $\frac{۱}{d^{۲}}$ هستند و از تشاوی آنها d حذف می‌شود و مساحت سطح A بستگی به d ندارد. بنابراین با دو برابر شدن فاصله‌ی سفینه از خورشید، مساحت سطح بادبان همان $۱/۹۷\times۱۰^{۴}m^{۲}$ باقی می‌ماند.

د) در حالتی که نور خورشید همواره عمود بر بادبان بتابد، نیروی کل (تابشی و گرانشی) وارد بر بادبان و سفینه با شرایط قسمت «ب» صفر خواهد بود. بنابراین هیچ نیروی خالصی به مجموعه وارد نشده و مطابق قانون اول نیوتن، مسیر حرکت بادبان و سفینه مستقیم الخط یکنواخت خواهد بود.

۲- برای حل این مسئله باید زمان رسیدن اولین و آخرین پرتوی یک علامت نوری را به انتهای دیگر تار نوری محاسبه کنیم. اختلاف این دو زمان پهن شدگی علامت نوری را نشان می‌دهد. برای اینکه گیرنده بتواند به خوبی علایم نوری را تفکیک کند باید بازه‌ی زمانی ارسال علایم (Δt)، بیشتر از این پهن‌شدگی باشد. زمان رسیدن اولین پرتو که خط مستقیم AB را طی می‌کند برابر است با:

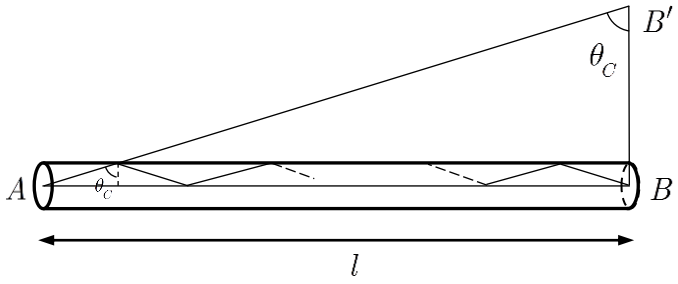
$$t=\frac{l}{v}=\frac{l}{c/n}=\frac{nl}{c}$$

که در آن $v=\frac{c}{n}$ سرعت نور در تار نوری با ضریب شکست n است و c سرعت نور در خلأ می‌باشد.

همچنین طولانی‌ترین مسیر برای پرتویی که از A به B می‌رسد مسیری است که پرتو تحت زاویه‌ی بحرانی θ_{c} به سطح جانبی تار نوری

برخورد می‌کند. زیرا برای زوایای کوچکتر از آن، پرتو از سطح جانبی تار خارج می‌شود و طول تار طی نمی‌کند. طول این مسیر معادل با طول AB' است، که مطابق شکل برابر $\overline{AB'}\dfrac{l}{\sin\theta_c}$ است. بنابراین مدت زمان طی این پرتو داخل تار نوری برابر است با:

$$t_۲=\frac{\overline{AB'}}{v}=\frac{l/\sin\widehat{\theta}_c}{c/n}=\frac{n^۲l}{c}$$



$$t_۲-t_۱=\frac{n^۲l}{c}-\frac{nl}{c}=\frac{nl}{c}(n-۱)=\frac{۱/۳۶\times۸۰}{۳\times۱۰^۸}(۱/۳۶-۱)\approx۱/۳\times۱۰^{-۷}s=۱۳۰ns$$

چون پهنای زمانی علامت ورودی یک نانوثانیه است، بنابراین می‌توان از آن در مقابل ۱۳۰ ns صرفنظر کرد. بنابراین فاصله‌ی ارسال علایم باید تقریباً بیش از ۱۳۰ ns باشد.

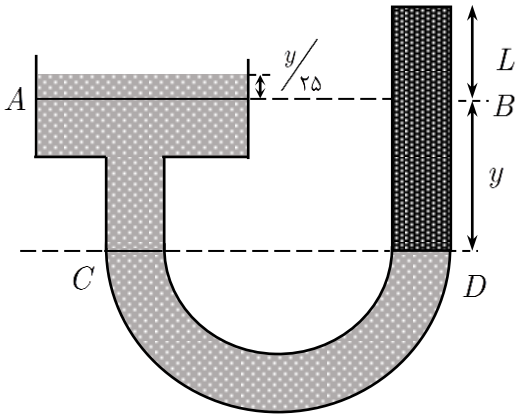
۳- ماخ الف) فرض نکید سطح اولیه‌ی جیوه، امتداد افقی AB باشد. پس از ریختن آب در لوله، جیوه در داخل آن به اندازه‌ی y پایین می‌آید. چون قطر ظرف استوانه‌ای ۵ برابر قطر لوله است، بنابراین جیوه‌ی داخل ظرف استوانه‌ای به اندازه‌ی $y/۲۵$ می‌رود. اگر فشار را در سطح CD از هر دو طرف به دست آورده و آنها را با هم مساوی قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\rho H_g g(\frac{y}{۲۵}+y)=\rho H_۲ og(L+y)$$

$$\frac{۲۶}{۲۵}\rho H_g y=\rho H_g o(L+y)$$

$$\Rightarrow y=\frac{\rho H_g oL}{\frac{۲۶}{۲۵}\rho H_g-\rho H_g o}=\frac{۱\times۶۵/۲}{\frac{۲۶}{۲۵}\times۱۳/۵-۱}=۵cm$$

بنابراین ارتفاع آب در لوله برابر $۷۰/۲cm$ $۵+۶۵/۲=$ است.



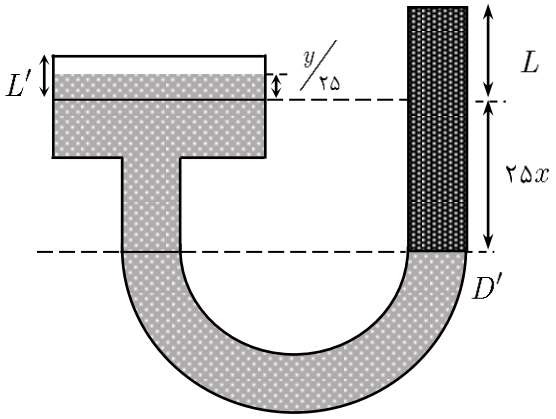
ب) در این حالت که بالای ظرف استوانه‌ای بسته است، با ریختن آن در لوله سطح جیوه در ظرف استوانه‌ای به اندازه‌ی x بالا می‌رود.
با فرض اینکه هوای داخل ظرف یک گاز کامل است می‌توان فشار هوای بالای ظرف را به دست آورد. فشار اولیه‌ی هوا، فشار جو است که برابر ۷۵$cmHg$ است. با فرض دمای ثابت برای هوای بالای ظرف داریم:

$$P_{\circ}AL' = PA(L'-x)$$

$$\Rightarrow P = \frac{P_{\circ}L'}{L'-x} = \frac{P_{\circ}}{1-\frac{x}{L'}} \approx P_{\circ}(1+\frac{x}{L'})$$

$$\Rightarrow P = P(1+_{\circ}\frac{x}{L'}) = 75\times(1+\frac{x}{20})cmHg$$

که در آن x برحسب سانتیمتر است.



ج) اگر فشار را در سطح $C'D'$ از هر دو طرف به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$P+\rho H_{g}g(x+25x) = p_{\circ}+\rho H_{2}og(L+25x)$$

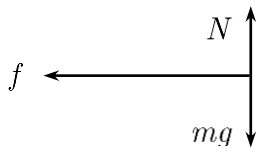
$$P_{\circ}(1+\frac{x}{L'}) - \mathrm{p}_{\circ} = \rho H_{2}og(L+25x) - \rho H_{2}g(\mathrm{x}+25x)$$

$$P_{\circ}\frac{x}{L'} = \rho H_{2}ogL + gx(25\rho H_{2}o - 26\rho Hg)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\rho H_{2}ogL}{\frac{P_{\circ}}{L'}+(26\rho Hg-25\rho H_{2}o)g} \approx 0/17cm$$

بنابراین ارتفاع آب در لوله در این حالت $69/45cm$ است. $65/2+25\times 0/17 = 69/45cm$

۴- الف) نمودار جسم آزاد جعبه به صورت روبرو است:



که در آن f نیروی اصطکاک وارد به جعبه از کف تریلی است. برای اینکه جعبه روی کف تریلی نلغزد، باید نیروی اصطکاک ایستایی برابر جرم جعبه ضربدر شتاب ماکزیمم تریلی است.

$$ma_{\max} = \mu_{s}mg \Rightarrow a_{\max} = \mu_{s}g = 0/3\times 10 = 3m/s^{2}$$

ب) چون شتاب تریلی $a = 4m/s^{2}$ است، بنابراین جعبه روی کف آن سر می‌خورد. اگر شتاب جعبه نسبت به تریلی a' باشد، قانون دوم نیوتن برای جعبه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$m(a-a') = f_{k}$$

$$a' = a-\frac{f_{k}}{m} \Rightarrow a' = a-\frac{\mu_{k}mg}{m} \Rightarrow a' = a-\mu_{k}g = 4-0/15\times 10 = 2/5m/s^{2}$$

www.MAAKH.ir

بنابراین مسافتی که جعبه روی کف تریلی در مدت $t=۲s$ طی می‌کند به صورت زیر است:

$$d' = \frac{۱}{۲}a't^{۲} = \frac{۱}{۲}\times ۲/۵\times ۲^{۲} = ۵m$$

توجه: سرعت اولیه‌ی جعبه نسبت به تریلی صفر است.

چون فاصله‌ی اولیه‌ی جعبه از عقب تریلی $۶m$ است، بنابراین در مدت شتاب داشتن تریلی، جعبه به انتهای آن نمی‌رسد. همچنین در مدت این ۲ ثانیه سرعت جعبه نسبت به تریلی برابر است با:

$$V' = a't = ۲/۵\times ۲ = ۵m/s$$

سرعت تریلی نیز پس از مدت زمان ۲ ثانیه نسبت به زمین برابر است با:

$$V = V_{۰} + at = ۳ + ۴\times ۲ = ۱۱m/s$$

چون پس از مدت زمان ۲ ثانیه، جعبه نسبت به تریلی سر می‌خورد و دارای سرعت $۵m/s$ است و فاصله‌ی آن نسبت به عقب تریلی نیز $۶-۵=۱m$ است، بنابراین سرعت آن نسبت به تریلی وقتی به انتهای تریلی می‌رسد به صورت زیر محاسبه می‌شود. ابتدا شتاب جعبه را در این حالت محاسبه می‌کنیم:

$$ma'_{۱} = -m\mu_k g \Rightarrow a'_{۱} = -\mu_K g \Rightarrow a'_{۱} = -۰/۱۵\times ۱۰ = -۱/۵m/s^{۲}$$

بنابراین سرعت آن در انتها برابر است با:

$$V_f'^{۲} - V'^{۲} = ۲a'_{۱}d'_{۱}$$
$$V_f'^{۲} - ۵^{۲} = ۲\times(۱/۵)\times ۱$$
$$V_f'^{۲} = ۲۲ \Rightarrow V'_f \approx ۴/۷m/s$$

بنابراین سرعت جعبه نسبت به زمین برابر است با:

$$V_b = V - V'_f = ۱۱ - ۴/۷ = ۶/۳m/s$$

۵- ماخ معادله‌ی مربوط به مدار به صورت زیر است:

$$E = RI + \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} \quad (۱)$$

الف) در لحظه‌ی $t=۰$ جریان I برابر صفر است و شیب جریان نسبت به زمان، مطابق نمودار داده شده، تقریباً برابر است با:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{۲mA}{۰/۱ms} = ۲۰A/s$$

همچنین بار خازن (q) برابر صفر است. بنابراین مطابق معادله‌ی (۱) داریم:

$$E = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow ۵ = L\times ۲۰ \Rightarrow L = ۰/۲۵H$$

ب) اولی بار خازن تا لحظه‌ی $t_{۲}$ برابر سطح زیر نمودار است. تعداد خانه‌های زیر این نمودار تا این لحظه ۱۰۲ خانه است که چون سطح هر یک از $۰/۱\mu C$ است، بنابراین بار خازن برابر خواهد شد با:

$$q = ۱۰۲\times ۰/۱ = ۱۰/۲\mu C$$

از طرفی مقدار $\frac{dI}{dt}$ تقریباً برابر است با:

$$\frac{dI}{dt} \approx -\frac{۳mA}{۰/۲ms} = -۱۵A/s$$

$$E = \frac{q}{c} + L\frac{dI}{dt} \Rightarrow ۵ = \frac{۱۰/۲}{c} - ۰.۲۵\times ۱۵ \Rightarrow c = ۱/۱۷\mu F$$

ج)

$$(۱): \quad q = ۴۹ \times ۰/۱ \quad ,۴۹f \qquad ۹/۵mA \; I \; \frac{dI}{dt} t_۱$$

$$E = RI + \frac{q}{C}$$

$$۵ = R \times ۹/۵ \times ۱۰^{-۳} + \frac{۴/۹}{۱/۱۷}$$

$$\Rightarrow R \approx ۸۵/۵\Omega$$

د)

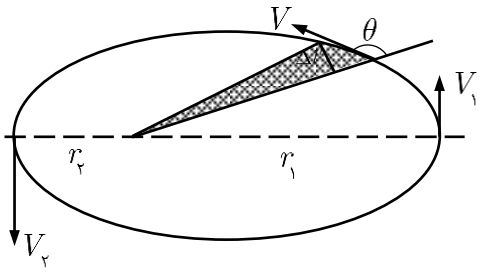
$$(۱): I \approx -vmA \quad \frac{dI}{dt} t_۳$$

$$E = RI + \frac{q}{C}$$

$$۵ = ۸۵/۵ \times (-۷ \times ۱۰^{-۳}) + \frac{q}{C} \Rightarrow V_c = \frac{q}{C} \approx ۵/۶V$$

۶- الف) ماخ

$$\Delta S = \frac{۱}{۲} r \Delta l' = \frac{۱}{۲} r \Delta l \sin\theta, \quad \Delta l = V \Delta t \qquad \Delta t$$



بنابراین مساحت جاروب شده در واحد زمان، $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ می‌شود:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\frac{۱}{۲} r \Delta l \sin\theta}{\Delta t} = \frac{۱}{۲} r V \sin\theta$$

ب) در حالتی که r کوتاه‌ترین یا بزرگترین مقدار است، سرعت بر r عمود است؛ یعنی $\theta = \frac{\pi}{۲}$ است. با استفاده از قانون دوم کپلر داریم:

$$\frac{۱}{۲} r_۱ V_۱ \sin\frac{\pi}{۲} = \frac{۱}{۲} r_۲ V_۲ \sin\frac{\pi}{۲}$$

$$r_۱ V_۱ = r_۲ V_۲ \Rightarrow V_۲ = V_۱ \frac{r_۱}{r_۲}$$

از طرف با استفاده از بقای انرژی مکانیکی داریم:

$$\frac{۱}{۲} m V_۱^۲ - \frac{G M_e m}{r_۱} = \frac{۱}{۲} m V_۲^۲ - \frac{G M_e m}{r_۲}$$

$$V_1^2 - V_2^2 = 2GM_e(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

که با جایگزین کردن مقدار $V_2 = V_1 \frac{r_1}{r_2}$ به دست می‌آوریم:

$$V_1^2 = V_2^2 \frac{r_1^2}{r_2^2} = 2GM_e(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1})$$

$$V_1^2 = \frac{2GM_e(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1})}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} = \frac{2GM_e r_2}{r_1(r_1 + r_2)}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2GM_e r_2}{r_1 + (r_1 + r_2)}}$$

و همچنین مقدار V_2 می‌شود:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM_e r_1}{r_2 + (r_1 + r_2)}}$$

۷- ماخ الف) با توجه به اینکه جرم داخل کره، $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$، ثابت است، با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه داریم:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3r^2 \frac{dr}{dt}\rho + r^3 \frac{d\rho}{dt})$$

طرف سمت چپ رابطه‌ی اخیر صفر است زیرا m ثابت است. بنابراین داریم:

$$0 = 3\rho \frac{dr}{dt} + r\frac{d\rho}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dr}{dt}}{r} = -\frac{1}{3}\frac{\frac{d\rho}{dt}}{\rho}$$

$$\Rightarrow H = -\frac{1}{3}\frac{\frac{d\rho}{dt}}{\rho}$$

ب) مطابق قانون دوم نیوتن داریم:

$$-\frac{GMm}{r^2} = ma \Rightarrow a = -\frac{GM}{r^2}$$

ج) انرژی جنبشی جرم m عبارت است از:

$$K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 = \frac{1}{2}mr^2H^2$$

که در آن $H = \frac{\frac{dr}{dt}}{r}$ استفاده شده است. انرژی کل جرم m نیز برابر است با:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mr^2H^2 - \frac{GMm}{r}$$

د) برای اینکه جرم m بتواند تا بی‌نهایت برود باید انرژی کل آن بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی:

$$E \geq ۰$$

با جایگزین کردن مقدار E از قسمت (ج) در رابطه‌ی اخیر داریم:

$$\frac{۱}{۲}mr^۲H^۲ - \frac{GMm}{r} \geq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}mr^۳H^۲ \geq GM$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}mr^۳H^۲ \geq G(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\rho)$$

$$\Rightarrow H^۲(t) \geq \frac{۸}{۳}\pi G\rho(t)$$

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات آزمون عملی
مرحله دوم
دوازدهمین دوره‌ی المپیاد فیزیک سال ۱۳۹۸

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
--	۱	۳۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

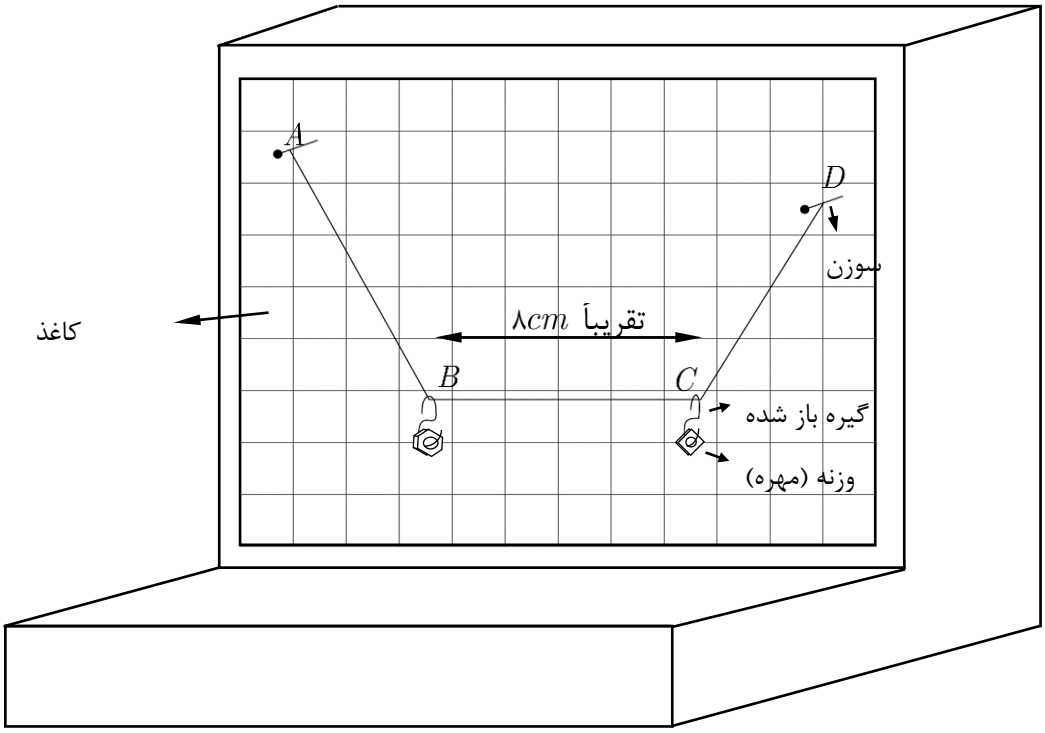
ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۱ سوال تشریحی** و وقت آن **۳۰ دقیقه** است.
- نمره‌ی هر سوال در ابتدای آن نوشته شده است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- جمع‌آوری و آماده‌سازی دفترچه‌ی سوالات این آزمون توسط **کمیته‌ی علمی ماخ** انجام شده است.

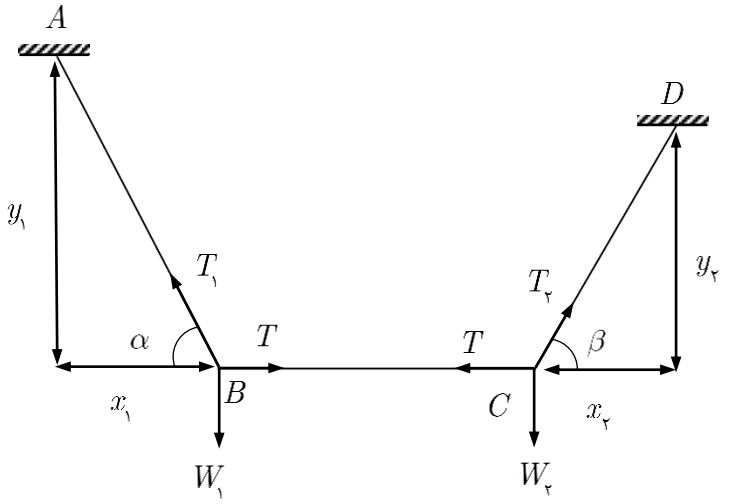
www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

به کمک مجموعه‌ای از ابزارهای ساده، می‌توان ترازویی مطابق شکل (۱) ساخت و به وسیله‌ی آن نسبت جرم مهره‌های آویخته شده را اندازه گرفت.



شکل (۱)



شکل (۲)

در شرایطی که مطابق شکل (۲) نخ در فاصله‌ی BC در راستای افقی قرار گرفته و تعادل مجموعه برقرار است، روابط زیر را می‌توان نوشت.

$$T_1 \cos\alpha = T = T_2 \cos\beta$$

$$T_1 \sin\alpha = m_1 g \quad , \quad T_2 \sin\beta = m_2 g$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{y_1}{x_1}.\frac{x_2}{y_2}$$

وسایل آزمایش:

پایه‌ی یونولیتی، کاغذ میلی‌متری، مقداری نخ، چهار سوزن، چهار گیره‌ی کاغذ، شش پونز، یک مهره‌ی چهارگوش، و یک مهره‌ی شش گوش.

شرح آزمایش:

ابتدا کاغذ میلی‌متری را به کمک یکی از سوزن‌ها از یکی از گوشه‌های بالای آن به پایه‌ی یونولیتی متصل کنید.

یکی از مهره‌ها را به کمک نخ از این سوزن آویزان کنید. با این ابزار، به کمک پونز، کاغذ میلی‌متری را طوری روی یونولیت ثابت کنید که خط‌های افقی کاغذ موازی سطح افقی باشد.

روش خود را برای انجام این کار توضیح دهید.

حال تکه نخی به طول تقریبی $۲۰\ cm$ بردارید. دو گیره‌ی کاغذ را چنان که در شکل (۱) می‌بینید باز کنید. نخ را از دو نقطه‌ی میانی (نقاط B و C) به گیره‌ها گره بزنید. هر سر نخ را به یک سوزن گره بزنید. از دو سوزن به عنوان تکیه‌گاه‌های A و D استفاده کنید. یکی از آنها را در یک گوشه‌ی کاغذ میلی‌متری (صفحه‌ی یونولیتی) در مکانی مناسب فرو کنید. این تکیه‌گاه (A) را تا آخر آزمایش ثابت نگه دارید. حال مکان تکیه‌گاه D را چنان تعیین کنید که نخ BC افقی قرار گیرد. در این حال سر سوزن دیگر (تکیه‌گاه D) را نیز در صفحه‌ی یونولیتی فرو کنید. توجه کنید که برای برقراری تعادل و افقی شدن BC ، برای مکان D بیش از یک جواب پیدا می‌شود.

نکته‌ی ۱- هنگام فرو کردن سوزن دوم (تکیه‌گاهD)، مراقب باشید BC افقی مانده باشد.

نکته‌ی۲- نیازی نیست A و D روی یک خط افقی قرار گیرند.

مقادیر $x_۱$، $x_۲$ ، $y_۱$ و $y_۲$ را اندازه‌گیری کنید و در جدول (در پاسخ‌نامه) ثبت کنید. این آزمایش را سه بار دیگر(برای سه نقطه‌ی متفاوت D) تکرار کنید و خانه‌های خالی پاسخ‌نامه را پر کنید. $m_۱$ جرم مهره‌ی شش گوش، و $m_۲$ جرم مهره‌ی چهارگوش $۳g$ است. (۱۸ نمره)

در مورد پاسخ سوال عملی مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد فیزیک چند نکته حائز اهمیت بود:

- مهم‌ترین نکته این بود که با داشتن دقت زیاد، عدد آخر با خطای کم به دست آید.
- و در عین حال رعایت چند نکته ضروری بود که رعایت هر یک از آنها دارای امتیاز بود.
- توضیح نحوه‌ی انجام آزمایش و نحوه‌ی چیدن مجموعه‌ی آزمایش.
- پر کردن جدول پاسخ (در واقع تکرار آزمایش به تعدادی که در جدول پاسخ‌نامه از دانش‌آموزان خواسته شده بود.)
- انجام محاسبات به پایان رساندن آنها (رها کردن اعداد به صورتی کسری قابل قبول نبود).
- ذکر این خطا در آزمایش که ما از وزن گیره‌ها صرف‌نظر کرده‌ایم.